

非均匀展宽体系 Maxwell-Bloch 方程的求解及应用*

李 成, 张华荣, 余向阳

(中山大学光电材料与技术国家重点实验室, 广东 广州 510275)

摘 要: 建立了高精度快速求解非均匀展宽二能级体系 Maxwell-Bloch (MB) 耦合方程的数值算法。通过与特定条件下 MB 方程解析解及面积定理的比较, 表明算法具有良好的收敛性和稳定性。作为示例, 应用所建立的数值算法求解了一般条件下的 MB 方程, 由计算结果分析了失谐量、弛豫时间以及非均匀展宽线宽对光脉冲在介质中传播的影响。该数值算法为进一步研究光与物质相互作用的物理过程提供了一个很好的工具, 对 MB 方程以及修正的这类偏微分方程组具有普适性。

关键词: Maxwell-Bloch 方程; 非均匀展宽二能级体系; 偏微分方程数值解法; 面积定理

中图分类号: O431.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 04-0036-06

Numerical Method and Application for Optical Maxwell-Bloch Equations in Inhomogeneously Broadened Medium

LI Cheng, ZHANG Huarong, YU Xiangyang

(State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies,
Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: An accurate and effective numerical method is presented to solve the Maxwell-Bloch equations that are used to describe the optical pulse propagation and interaction with inhomogeneously broadened two-level medium. The convergence and stability of this numerical method are proved by comparing with the analytic solutions and area theorem derived under special condition. The simulations of arbitrary conditions is discussed by employing this method and analyze the pulse evolution for different detunings, relaxation times and inhomogeneously broadened linewidths. The established numerical method provides a good way to have further study about the coherent interaction of short optical pulses with resonant mediums, and can be used to solve the corrections of Maxwell-Bloch equations.

Key words: Maxwell-Bloch equations; inhomogeneously broadened two-level system; numerical method of partial differential equations; area theorem

超短激光脉冲技术的发展为研究其与共振介质的相干相互作用提供了可能, 在这类超快过程中, 弛豫时间远大于脉冲与共振介质的作用时间, 因此整个过程可视为是瞬态相干的^[1]。瞬态相干光学已经广泛应用于研究光学材料的相干光谱及量子信息处理等领域^[2-3], 尤其在实现数据存取的光存储方面具有很大的潜在应用价值^[4], 这类操作通常

在非均匀展宽体系中才能实现。非均匀展宽二能级体系中超短激光脉冲的传播特性已由著名的面积定理进行了很好的描述^[5]。面积定理的推导忽略了弛豫时间的作用, 并作了一系列近似才得到的, 并不能完全地显示光脉冲的传播特性。非均匀展宽二能级体系的 MB 耦合方程只有在特定条件下才能得到双曲正割型的孤子解^[6], 一般情况下无法求得

* 收稿日期: 2008-12-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10574166); 广东省自然科学基金资助项目 (8151027501000062)

作者简介: 李成 (1984 年生), 男, 硕士研究生; 通讯作者: 余向阳; E-mail: cesyxy@mail.sysu.edu.cn

其解析解。要详细研究这类方程所描述的物理过程和性质, 需要建立精确而可靠的有效数值算法。本文作为光与物质相互作用半经典理论研究系列论文之一, 是在前面工作对均匀展宽二能级体系的 MB 方程求解的基础上发展而来的^[7-8], 是求解均匀展宽二能级体系 MB 方程“预报校正-四阶龙格-库塔法 (PCRK4)”算法的发展。

1 MB 方程的解析解及面积定理

非均匀展宽二能级体系在沿 z 轴方向传播的光场近共振相互作用下, 在电偶极近似、慢变近似和旋转波近似下可得到如下形式的 MB 方程^[6]

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\Gamma_2 u - \Delta v \\ \dot{v} &= -\Gamma_2 v + \Delta u + w\mu\bar{E}/\hbar \\ \dot{w} &= -\Gamma_1 w - v\mu\bar{E}/\hbar \\ \dot{\bar{E}}_z + \frac{n}{c}\dot{\bar{E}}_t &= \frac{\mu_0 c \omega N \mu}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta, z, t) g(\Delta) d\Delta\end{aligned}\quad (1)$$

式中, u 、 v 、 w 为 Bloch 矢量, u 、 v 分别表征了极化强度的色散和吸收, w 为上下能级的布居差。 Δ 为共振失谐量, $\Gamma_1 = 1/T_1$, T_1 为纵向弛豫时间, $\Gamma_2 = 1/T_2$, T_2 是横向弛豫时间 (即退相时间)。 c 是光在真空中的速率, $\hbar$ 为普朗克常数, u 是真空中电磁系数, n 是介质的线性折射率, μ 是电偶极跃迁矩阵元, N 为体系的密度数, $g(\Delta)$ 是归一化非均匀展宽的线形方程。

定义拉比频率 $\Omega = \mu\bar{E}/\hbar$ (由此式知拉比频率 Ω 也可用来表示光场的振幅 $\bar{E}$), 有效时间 $\tau_0 = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{N\mu_0 c^2 |\mu|^2 \omega}}$ 。作如下变换: $z' = nz/(c\tau_0)$, $t' = t/\tau_0$, $\Omega' = \tau_0 \Omega$, $\Delta' = \tau_0 \Delta$ 。为了简洁, 将 z' 、 t' 、 Ω' 、 Δ' 写回 z 、 t 、 Ω 、 Δ , 得到无量纲的 MB 方程

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\Gamma_2 u - \Delta v \\ \dot{v} &= -\Gamma_2 v + \Delta u + \Omega w \\ \dot{w} &= -\Gamma_1 w - \Omega v \\ \Omega_z + \Omega_t &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta, z, t) g(\Delta) d\Delta\end{aligned}\quad (2)$$

在初始条件为

$$u|_{t=-\infty} = 0, v|_{t=-\infty} = 0, w|_{t=-\infty} = -1, \Omega|_{t=-\infty} = 0 \quad (3)$$

并忽略弛豫作用 ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$) 的情况下, 偏微分方程组 (2) 的解析解为^[6]

$$\Omega = 2\tau_p^{-1} \cdot \text{sech}[(t - z/U)/\tau_p] \quad (4)$$

式中 U 为光脉冲在介质中的传播速度, τ_p 是具有时间量纲的参数

$$\tau_p = \sqrt{(U^{-1} - 1)/F(\Delta)} \quad (5)$$

其中 $F(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta) g(\Delta) d\Delta$, 而 $f(\Delta) = (1 + \tau_p^2 \Delta^2)^{-1}$ 。由 (4) 式可以看出, Ω 的解析解与失谐量 Δ 无关, 因此可由边界条件来确定参数 τ_p , 即由初始入射脉冲确定。对 (4) 式的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t) dt = 2\pi$, 因此要得到 MB 方程的解析解, 输入的初始脉冲必须是一个具有稳定孤子解形式的脉冲, 且要求脉冲面积为 2π 。假定初始入射脉冲为双曲正割型

$$\Omega(t)|_{z=0} = \Omega_0 \text{sech}(\alpha t/t_p) \quad (6)$$

其中 $\alpha = 2\ln(1 + \sqrt{2})$, t_p 为初始脉冲的半高宽。峰值 Ω_0 与初始脉冲面积 S_0 的关系为 $\Omega_0 = \alpha S_0/(\pi t_p)$ 。对于 $S_0 = 2\pi$ 的脉冲 $\Omega_0 = 2\alpha/t_p$, 这样有

$$\Omega(t)|_{z=0} = 2\alpha t_p^{-1} \cdot \text{sech}(\alpha t/t_p) \quad (7)$$

比较式 (4) 和式 (6), 可得 $\tau_p = t_p/\alpha$, 因而得到光脉冲的传播速度为

$$U = \alpha^2 [\alpha^2 + t_p^2 F(\Delta)]^{-1} \quad (8)$$

共振时 $F(0) = 1$, 则 $U = \alpha^2 (\alpha^2 + t_p^2)^{-1}$ 。可见共振时非均匀展宽和均匀展宽脉冲传播速度相同。

定义光脉冲面积 $S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(z, t') dt'$, 在初始条件 (3) 且忽略弛豫作用时, 方程 (2) 经过一定的近似后得到脉冲面积 $S(z)$ 所遵守的运动方程^[5]

$$S(z)' = -0.5 \cdot a \sin S(z) \quad (9)$$

式 (9) 即称为面积定理。其解为:

$$S(z) = 2e^{-az/2} \arctan(S_0/2) \quad (10)$$

式中无量纲化 $a = 2\pi g(0)/\tau_0$, 称为小信号共振吸收系数。

2 MB 方程的数值算法

2.1 算法的建立

推导 MB 方程的解析解或面积定理时, 都是在一定的近似条件下得到的, 只能研究特定情况下的脉冲传播过程和面积演化趋势。要全面得到非均匀展宽 MB 方程所包含的物理内容, 并用于实际物理体系的解释, 需要求解非近似条件下的 MB 方程^[9-12]。本部分将详细介绍非均匀展宽体系 MB 方程数值解法的建立。其主要步骤和求解格式如下。

Step 1. Bloch 方程 (2a ~ 2c) 是时间的一阶常微分方程组, 对应于每一个空间格点的 u 、 v 、 w 可用标准 RK4 法进行求解^[9]。其格式如下:

$$u_{z,i+1} = u_{z,i} + h_i(f_{u1} + 2f_{u2} + 2f_{u3} + f_{u4})/6$$

$v_{z,t+1} = v_{z,t} + h_t(f_{v1} + 2f_{v2} + 2f_{v3} + f_{v4})/6$
 $w_{z,t+1} = w_{z,t} + h_t(f_{w1} + 2f_{w2} + 2f_{w3} + f_{w4})/6$ (11)
 定义 $f_u = -\Gamma_2 u - \Delta v$, $f_v = -\Gamma_2 v + \Delta u + \Omega w$, $f_w = -\Gamma_1 w - \Omega u$ 即分别为 (2a~2c) 式的右边, h_t 为时间格点步长, 图 1 (a) 是此步程序的流程图。 (11) 式中各项

$$\begin{aligned}
 f_{u1} &= [-\Gamma_2 u_{z,t} - \Delta v_{z,t}] h_t \\
 f_{u2} &= [-\Gamma_2 (u_{z,t} + h_t f_{u1}/2) - \Delta (v_{z,t} + h_t f_{v1}/2)] h_t \\
 f_{u3} &= [-\Gamma_2 (u_{z,t} + h_t f_{u2}/2) - \Delta (v_{z,t} + h_t f_{v2}/2)] h_t \\
 f_{u4} &= [-\Gamma_2 (u_{z,t} + h_t f_{u3}) - \Delta (v_{z,t} + h_t f_{v3})] h_t \\
 f_{v1} &= (-\Gamma_2 v_{z,t} + \Delta u_{z,t} + \Omega_{z,t} w_{z,t}) h_t \\
 f_{v2} &= [-\Gamma_2 (v_{z,t} + h_t f_{v1}/2) + \Delta (u_{z,t} + h_t f_{u1}/2) + \Omega_{z,t} (w_{z,t} + h_t f_{w1}/2)] h_t \\
 f_{v3} &= [-\Gamma_2 (v_{z,t} + h_t f_{v2}/2) + \Delta (u_{z,t} + h_t f_{u2}/2) + \Omega_{z,t} (w_{z,t} + h_t f_{w2}/2)] h_t \\
 f_{v4} &= [-\Gamma_2 (v_{z,t} + h_t f_{v3}) + \Delta (u_{z,t} + h_t f_{u3}) + \Omega_{z,t} (w_{z,t} + h_t f_{w3})] h_t \\
 f_{w1} &= [-\Gamma_1 w_{z,t} - \Omega_{z,t} u_{z,t}] h_t \\
 f_{w2} &= [-\Gamma_1 (w_{z,t} + h_t f_{w1}/2) - \Omega_{z,t} (u_{z,t} + h_t f_{u1}/2)] h_t \\
 f_{w3} &= [-\Gamma_1 (w_{z,t} + h_t f_{w2}/2) - \Omega_{z,t} (u_{z,t} + h_t f_{u2}/2)] h_t \\
 f_{w4} &= [-\Gamma_1 (w_{z,t} + h_t f_{w3}) - \Omega_{z,t} (u_{z,t} + h_t f_{u3})] h_t
 \end{aligned} \quad (12)$$

Step 2. Maxwell 方程 (2d) 式是时间和空间的一阶偏微分方程, 并包含了非均匀展宽线宽的积分项。因此, 在数值计算时, 先将空间点对应的 Bloch 矢量 v 积分项进行累加, 即是 (2d) 式右边

$$\begin{aligned}
 V(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta, z, t) g(\Delta) d\Delta = \\
 &= \sum_{\Delta \rightarrow -\infty}^{\Delta \rightarrow \infty} v(\Delta, z, t) g(\Delta) h_{\Delta}
 \end{aligned} \quad (13)$$

上式中 h_{Δ} 是非均匀展宽线宽的步长, v 是每一个空间格点下对应每个非均匀展宽线宽格点的值。图 1 (b) 是此子程序的流程图。

Step 3. 得到 $V(z,t)$ 以后, 再代回 (2d) 式, 其简单差分格式取为

$$(\Omega_{z+1,t+1} - \Omega_{z,t+1})/h_z + (\Omega_{z,t+1} - \Omega_{z,t})/h_t = V_{z,t+1} \quad (14)$$

上式中 h_z 为空间格点步长。将上式时间步长与空间步长取为相同值, 即 $h_z = h_t = h$, 则上式化为如下格式

$$\Omega_{z+1,t+1} = \Omega_{z,t} + hV_{z,t+1} \quad (15)$$

Bloch 方程组 (2a~2c) 用标准四阶龙格-库塔法, 而 Maxwell 方程 (2d) 采用中间格点对 Ω 进行校正, 即 (15) 式变为

$$\Omega_{z+1,t+1} = \Omega_{z,t} + h(v_{z,t+1} + v_{z+1,t+1})/2 \quad (16)$$

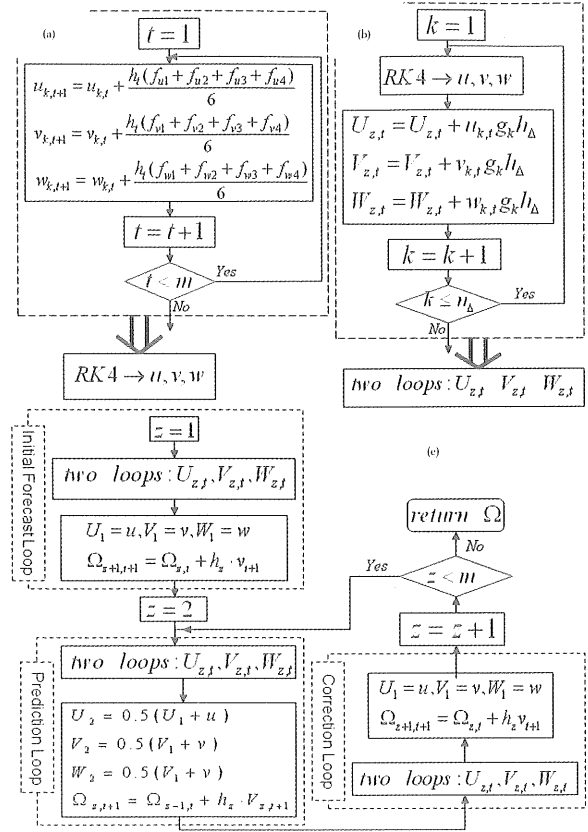


图 1 程序流程图 (a) Bloch 偏微分方程的子程序流程图, (b) 积分子程序流程图, (c) 主程序流程图。

Fig. 1 Flow chart for subroutines of (a) partial differential Bloch equations and (b) the integral equations, (c) is the main routine flow chart.

计算时的程序流程如图 1 (c), 包括初始值预报循环、校正循环和预报循环三大部分。这里空间每个格点所对应的 V 是由该空间格点的 Ω 求得的。对应于初始值预报循环中的 $z = 1$ 这个格点的 $V_{1,t}$ 直接由初始 $\Omega_{1,t}$ 代入 (11) 式与 (13) 式直接求出 (初始 Bloch 矢量无校正), 利用 (15) 式对下一个空间格点的 $\Omega_{2,t}$ 进行预报。在校正循环中, 将预报值 $\Omega_{2,t}$ 代入 (11) 式及 (13) 式求出 $V_{2,t}$ 的预报值, 然后再利用 (16) 式求出这个空间格点的 $\Omega_{2,t}$, 此即为校正后的 $\Omega_{2,t}$ 。在预报循环中, 利用校正后的 $\Omega_{2,t}$ 代入 (11) 式及 (13) 式求出 $V_{2,t}$ 的校正值, 利用 $V_{2,t}$ 的校正值对下一个空间格点的 $\Omega_{3,t}$ 进行预报。再将预报值 $\Omega_{3,t}$ 代入下一个空间格点的校正循环中求解 $V_{3,t}$ 的预报值。如此循环下去便可得到 Ω 的时空演化形式。

2.2 算法的验证

为了验证算法的收敛性和可靠性, 对非均匀展

宽介质中光脉冲演化过程的解析解 (即面积定理) 和数值解进行了比较。数值计算输入脉冲参数与解析解相同, 计算时取 $\tau_0 = 50$ fs, 时间以 τ_0 为单位, 长度以 $c\tau_0/n$ 为单位, 拉比频率以 $1/\tau_0$ 为单位。入射初始脉冲为双曲正割型, 脉冲面积为 2π , 计算时其它参数无量纲化的量分别为: 脉宽 $t_p = 1$, 脉冲中心 $t_0 = 5$ 处, 传播空间距离为 20, 积分时间为 40, 步长 0.02。非均匀展宽的线型 $g(\Delta)$ 设定为高斯型, 其线宽 Δ_d 设为 3。图 2 (a) 给出了传播空间距离分别为 0、5、10、15、20 时解析解和数值解的脉冲波形。比较发现, 数值解与解析解的结果符合得很好, 可以用于描述脉冲的演化规律。

图 2 (b) 是不同初始面积下, 数值解与解析

解脉冲面积的演化规律, 初始面积分别为 1.3π 、 1.5π 、 1.9π 和 2π , 脉冲的其它参数及传播的时空参数都与图 2 (a) 同。理论上脉冲面积的演化规律有: (1) 具有 2π 的整数倍的特定值的脉冲将在传输过程中保持面积不变; (2) 脉冲面积为非 2π 的整数倍时, 其面积将趋向于最接近的 2π 整数倍。比较数值解与解析解的结果发现, 其演化规律和形式与理论解释完全符合。表 1 给出了空间传播距离对脉冲传播面积的绝对误差的影响, 结果表明数值解和解析解间的误差是随空间计算距离的增大而递减的, 且 2π 脉冲演化的最大全局误差也是随空间传播距离的增加而递减的, 这都表明所建立算法具有良好的收敛性与可靠性。

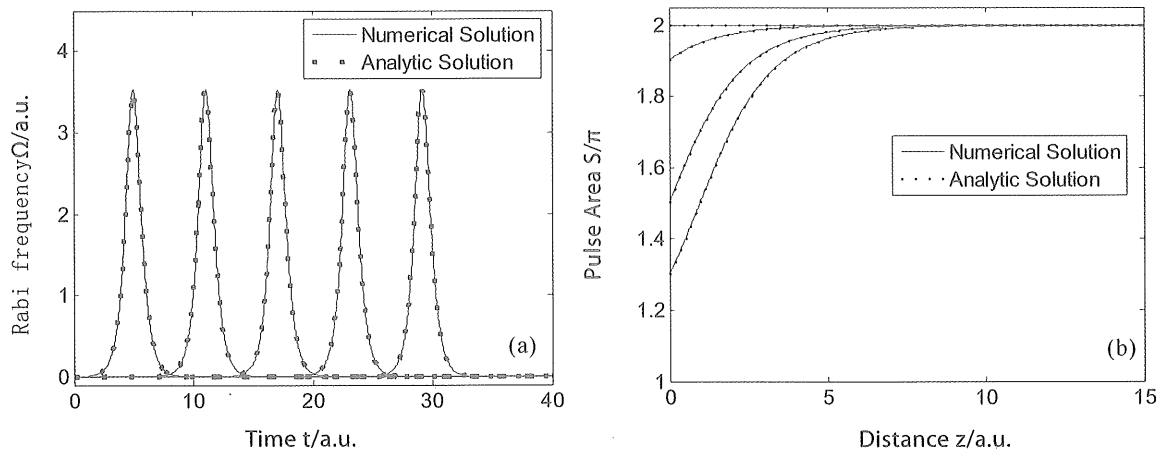


图 2 数值解与解析解 (a) 脉冲形状与 (b) 脉冲面积演化的比较。

输入脉冲面积 (a) 为 2π , (b) 分别为 1.3π , 1.5π , 1.9π 和 2π 。

Fig. 2 Comparison of numerical solution and analytic solution. (a) The initial input pulse area is 2π .

(b) Pulse area evolution. The initial input pulse areas are 1.3π , 1.5π , 1.9π and 2π respectively.

表 1 空间传播距离对脉冲传播面积的绝对误差的影响、及对 2π 面积最大全局误差的影响

Table 1 Absolute errors of areas evolution and maximum global errors of 2π pulse evolution for different propagation distances

初始脉冲面积		$L=3$	$L=6$	$L=9$	$L=12$	$L=15$
面积演化绝对误差	1.3π	0.003 5	0.001 2	$9.019\ 8e-5$	$6.544\ 7e-6$	$1.772\ 1e-6$
	1.5π	0.004 3	$6.263\ 9e-4$	$4.599\ 7e-5$	$3.365\ 8e-6$	$2.544\ 7e-7$
	1.9π	0.001 2	$8.980\ 3e-5$	$6.660\ 0e-6$	$5.733\ 4e-7$	$1.295\ 0e-7$
2.0π (最大全局误差)		0.029 1	0.029 0	0.028 8	0.028 7	0.027 8

3 数值计算结果与讨论

3.1 失谐量和弛豫时间的影响

应用上面建立的数值算法, 讨论非共振情况下

失谐量对脉冲面积演化的影响。初始输入脉冲为双曲正割型, 脉冲面积为 1.6π , 失谐量分别取为 $\Delta = 0.5, 1, 2, 4$, 脉冲的其它参数及传播的时空参数与图 2 相同。由图 3 的计算结果可看出: 无失谐时, 脉冲演化到稳定 2π 面积所经历的空间距离较

短, 曲线平滑; 随着失谐量的增大, 脉冲演化到稳定 2π 面积所经历的空间距离越来越长。

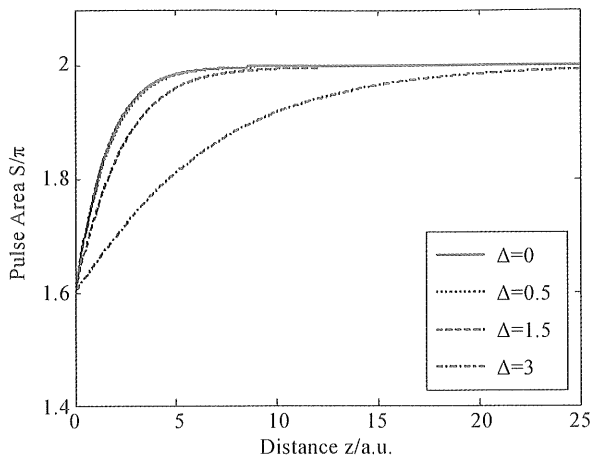


图3 脉冲面积随失谐量的演化

Fig. 3 Pulse areas evolution for different detunings.

在上面的数值计算中, 忽略了弛豫时间对脉冲传播的影响, 而在一些实验中, 弛豫项的影响通常是存在的, 因而有必要研究其对脉冲传播的影响。在共振时, 假定横向弛豫时间为纵向弛豫时间的十倍 (通常 T_2 远大于 T_1)。设定初始输入脉冲面积为 2π , T_2 分别取值 10, 20, 40, 100, 脉冲的其它参数及传播的时空参数都与图2同。图4显示了不同横向弛豫时间 T_2 对脉冲传输的影响。横向弛豫时间越小, 脉冲传输一定距离后被展宽得越大, 脉冲传输的速度变得更慢。

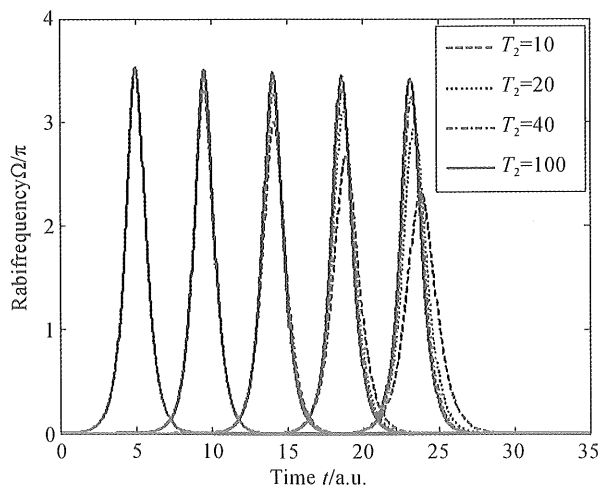


图4 横向弛豫时间对脉冲传输的影响

Fig. 4 Pulse evolution for different transverse relaxation times

3.2 非均匀展宽线宽的影响

脉冲的传播受到体系的非均匀展宽线宽的影响。本文所建立的数值算法, 可以有效地用于研究非均匀展宽线宽体系中光脉冲的传播规律及特性。图5给出了不同非均匀展宽线宽 Δ_d 对脉冲传播的影响。初始输入脉冲为双曲正割型, 脉冲面积为 1.6π , 非均匀展宽线宽的取值分别为 (a) $\Delta_d = 4$ 、(b) $\Delta_d = 2.77$ 、(c) $\Delta_d = 1$ 、(d) $\Delta_d = 0.1$, 其它参数都与图2同。由图示可以看出: Δ_d 较大时, 脉冲面积演化到 2π 后在介质中的传播相当平稳 (并能够很好地保持其形状), 传播到空间末端所经历时间较短; 随着 Δ_d 的减小, 脉冲的峰值开始出现振荡, 其主脉冲的时间后沿也会出现一系列的振; 随着 Δ_d 的继续减小脉冲峰值振荡得更加剧烈, 并且脉冲传播到空间末端所经历时间也越长, 这说明脉冲的传播速度也越慢。

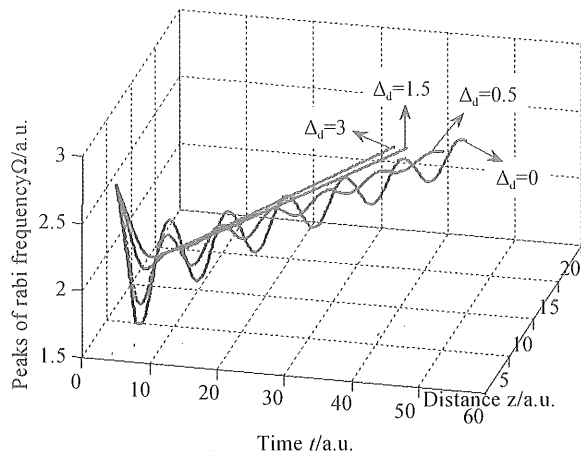


图5 非均匀展宽线宽对脉冲传输的影响

Fig. 5 Pulse evolution as a function of time and distance for different inhomogeneously broadened linewidths

4 结 论

本文建立了用于求解非均匀展宽二能级体系 MB 耦合方程的数值算法, 通过与解析解的比较, 验证了算法具有良好的收敛性和稳定性。作为算法的应用, 求解了非共振条件下面积的演化, 发现失谐量越大脉冲由初始面积演化到 2π 所经历的空间距离越长; 进一步研究了弛豫项的作用, 弛豫时间越小, 脉冲传输一定距离后被展宽得越大, 脉冲的传播速度也变得越慢; 讨论了不同非均匀展宽线宽对脉冲演化的影响, 发现非均匀展宽线宽越小, 脉冲的振荡越剧烈, 脉冲的传播速度越小。这些非特殊条件下所得到的计算结果, 有助于我们深入正确

地理解非均匀展宽体系中光脉冲传播及演化的规律, 并能够给出清晰的物理图像, 对实验和理论研究具有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] 余向阳, 周建英. 飞秒相干瞬态过程的 Bloch 方程描述 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 1999, 38(2): 24 - 27.
YU Xiangyang, ZHOU Jianying. Femtosecond optical coherent transients processes described with optical Bloch equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis SunYatSeni, 1999, 38(2): 24 - 27
- [2] MOISEEV S A, ARSLANOV N M. Efficiency and fidelity of photon-echo quantum memory in an atomic system with longitudinal inhomogeneous broadening [J]. Phys. Rev. A, 2008, 78(2): 023803.
- [3] GISIN N, MOISEEV S A, SIMON C. Storage and retrieval of time-bin qubits with photon-echo-based quantum memories [J]. Phys. Rev. A, 2007, 76(1): 014302.
- [4] Irina Novikova, Alexey V. Gorshkov, David F. Phillips, et al. Optimal Control of Light Pulse Storage and Retrieval [J]. Phys. Rev. Lett., 2007, 98(24): 243602.
- [5] EBERLY J H. Area theorem rederived [J]. Opt. Express, 1998, 2(5): 173 - 176.
- [6] ALLEN L, EBERLY J H. Optical resonance and two-level atoms [M]. New York: Dover, 1987.
- [7] 郭莹莹, 余向阳. 光学 Bloch 方程的数值解法 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2005, 44(5): 108 - 110.
GUO Yingying, YU Xiangyang. Numerical methods for optical Bloch equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2005, 44(5): 108 - 110.
- [8] 蒋月, 余向阳. 二能级体系 Maxwell-Bloch 方程的数值求解及其应用 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2007, 46(2): 176 - 179.
JIANG Yue, YU Xiangyang. Numerical methods and application for Maxwell-Bloch equations of two-level system [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2007, 46(2): 176 - 179.
- [9] JOHN H, KURTIS D. Numerical methods using MATLAB [M]. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004: 489 - 504.
- [10] LJUBOMIR M, CHRISTOPHER P. Power-series solutions to the optical Maxwell-Bloch equations [J]. J. Opt. Soc. Am. B, 1989, 6(3): 356 - 363.
- [11] AGARWAL G S, DEY T N. Fast light solutions in resonant media [J]. Phys. Rev. A, 2007, 75(4): 043806.
- [12] LEON J. Slow-light solutions in two-level media generated by evanescent fields [J]. Phys. Rev. A, 2007, 75(4): 063811.

(上接第 35 页)

- arrays [C]. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1994: 20 - 24.
- [3] UTHANSAKUL M, BIALKOWSKI M E. Suppression of multiple wideband interferers with the use of a wideband spatial beamformer [C] // Antennas and Propagation International Symposium, 2007 IEEE, 2007: 948 - 951.
- [4] SLAVAKIS K, YAMADA I. Robust wideband beamforming by the hybrid steepest descent method [J]. Signal Processing, IEEE Transactions, 2007, 55: 4511 - 4522.
- [5] HUANG L, SHEN B, LI M, et al. An efficient subband method for wideband adaptive beamforming [C] // 10th International Conference on Advanced Communication Technology, ICACT 2008, 2008: 1489 - 1492.
- [6] WARD D B, KENNEDY R A, WILLIAMSON R C. Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant farfield beam-patterns [J]. J. Acoust. Soc. Amer., 1995, 97: 1023 - 1034.
- [7] FROST O L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing [J]. Proc. IEEE, 1972, 60(8): 926 - 935.
- [8] WARD D B, KENNEDY R A, WILLIAMSON R C. An adaptive algorithm for broadband frequency invariant beamforming [C] // IEEE Inter. Conf. on Acous. Speech and Signal Processing, 1997: 3737 - 3740
- [9] ROHAN G, DIMITRIS A P, MICHAEL J M. Subspace direction finding with an auxiliary-vector basis [J]. Signal Processing, IEEE Transactions, 2007, 55: 758 - 763.
- [10] PADOS D A, KARYSTINOS G N, BATALAMA S N, et al. Auxiliary-vector RADAR on MCARM data [C] // 41st Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2007: 2028 - 2032.
- [11] PADOS D A, KARYSTINOS G N, BATALAMA S N, et al. Short-data-record adaptive detection [C] // Radar Conference, 2007 IEEE, 2007: 357 - 361.
- [12] ZHIGUO D, WARD D B, NABAR R U. Joint channel estimation and symbol detection for orthogonal space-time block-coding systems in frequency-selective channels [J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions, 2007, 56: 2475 - 2486.
- [13] HUANG Z, BALANIS C A. The MMSE algorithm and mutual coupling for adaptive arrays [J]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions, 2008, 56: 1292 - 1296.